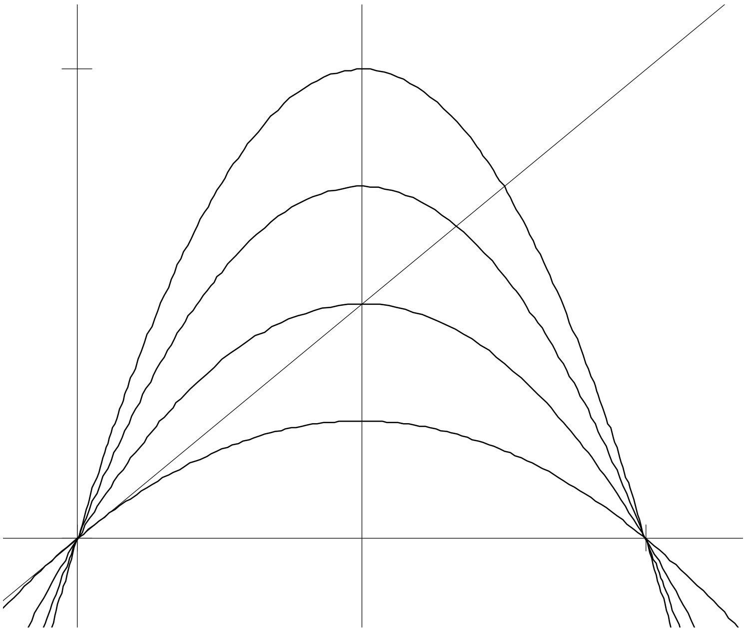
1°S	MODULE: BIFURCATION ET APPLICATION LOGISTIQUE

1°/ Soit la fonction f(x) = m x (1 - x) avec $0 < m \leq 4$



a/ Etudier cette fonction
Faire une étude générale
Dégager des résultats généraux

b/ Etudier le graphe:
Montrer que tout graphe passe par 2 points fixes

Où sont situés les sommets des paraboles ?

Entre quelles valeurs varie l'ordonnée du sommet?

2°/ Soit (D) la droite d'équation y = x
Discuter l'existence de points d'intersection entre (D) et le graphe. Nous noterons l(m) la solution non nulle. Calculer la pente des tangentes au graphe en ces points
Pour quelles valeurs de m, ces pentes ont-elles une valeur absolue plus petite que 1 ?

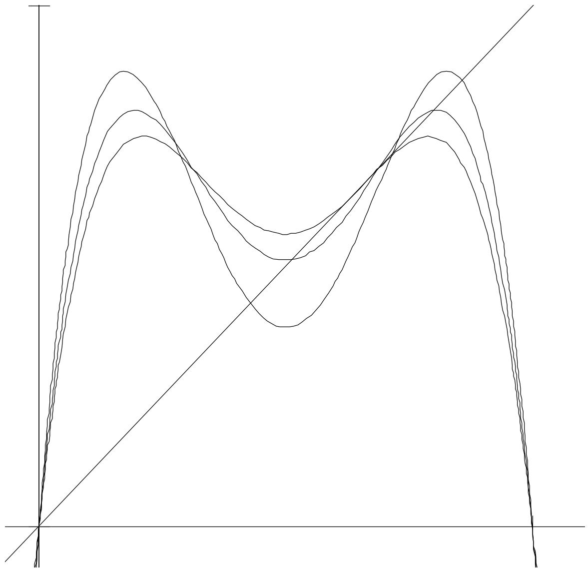
3°/ Etude de la suite définie par f(x)

Nous avons ainsi au 2°/ plusieurs intervalles pour m:

A/ **0 < m < 1:** Tracer le graphe pour, par exemple m = $\frac{1}{2}$. Placer sur le graphe, les termes de la suite définie par f(x) et de 1er terme 0.25 Vers quelle valeur converge cette suite ?

B/ **1 < m < 3:** Tracer le graphe pour, par exemple m = $\frac{5}{2}$. Placer sur le graphe, les termes de la suite définie par f(x) et de 1er terme 0.25. Vers quelle valeur converge cette suite?
Vous pourrez étudier le cas de convergence rapide pour m = 2.

C/ **3 < m < 4:** Tracer le graphe pour par exemple 3.2 et étudier la suite définie par f(x) et de premier terme 0.25. Vous pouvez constater qu'à partir d'un certain rang, la suite oscille entre deux valeurs.



4°/ Nous voulons justifier ce fait:

a/ Soit g(x) = f o f (x).
Etudier cette fonction pour 3 < m < 4

b/ Discuter les intersections de (D) avec le graphe de g(x).

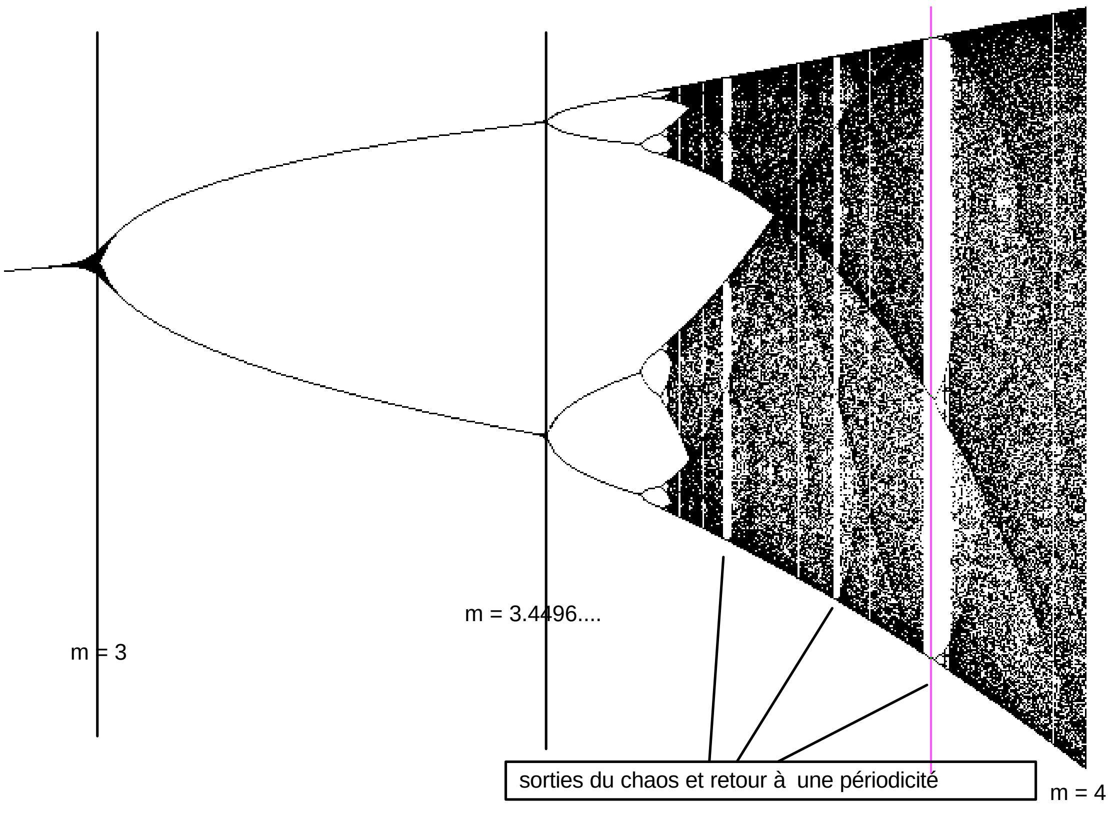
Vous obtenez une équation de degré 4, mais les solutions trouvées au 2°/ sont aussi solutions de cette équation.....

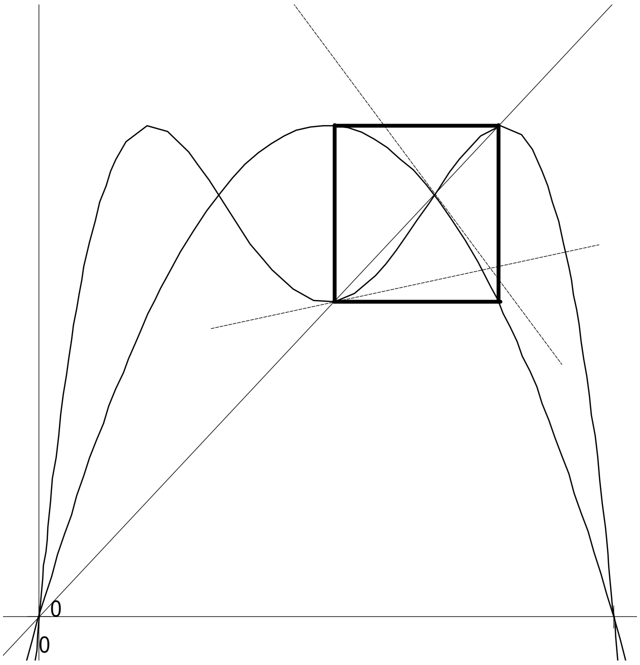
Nous poserons k(m) et p(m) les solutions autres que celles trouvées au 2°/

Un calcul des pentes des tangentes serait trop compliqué....

Nous admettrons que la valeur absolue de la pente est inférieure à 1 pour 3 < m < 3.4496...
Au-delà de 3.4496..., la suite oscille entre 4, 8, 16 ..... valeurs.
Nous pourrions faire une étude de g o g (x) mais ce serait vraiment trop compliqué....

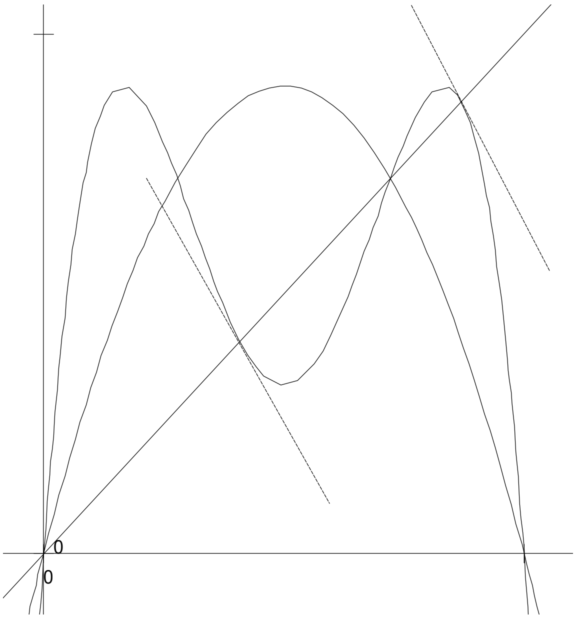
5°/ Synthèse sur la suite:
Nous allons dessiner le comportement de cette suite pour m entre 0 et 3.4496..:
Dessiner y = 0 pour $0 \leq m \leq 1$
puis y = l(m) pour $1 \leq m \leq 3$
puis y = k(m) et y=p(m) pour $3 \leq m \leq 3.4496...$
Voici le résultat complet pour $3 \leq m \leq 4$ obtenu en faisant calculer les termes de la suite en supprimant les premiers termes:





Voici le tracé des graphes de f(x) = mx(1-x) et g(x) = f (f (x)) pour m = 3.2

La suite après quelques termes, oscille entre deux valeurs qui sont les solutions de l'équation g(x)=x autres que 0 et $\frac{m-1}{m}$.
Alors que la pente de la tangente au point d'abscisse $\frac{m-1}{m}$ est supérieure en valeur absolue à 1, les pentes des tangentes au graphe de g(x) aux points d'abscisse
$\frac{m+1-\sqrt{m^2-2m-3}}{2m}$ et
$\frac{m+1+\sqrt{m^2-2m-3}}{2m}$ sont inférieures en valeur absolue à 1.



Voici les graphes de f(x) et g(x) pour m=3.5

Les tangentes aux points communs avec la droite y=x sont toutes supérieures à 1 en valeur absolue.

La suite "balance" donc entre des valeurs plus nombreuses

Pour m= 3.5, voici les graphes de f(x), g(x) et h(x)=g(g(x))......

Le graphe de h(x) coupe y=x en 8 points dont les 4 de g(x)....

En ces 4 nouveaux points,les tangentes ont une pente inférieure à 1 en valeur absolue, pour m=3.5, la suite "balance" entre ces quatre valeurs.....